Conclusion : f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2)a- $M_1 = f(M_0)$ donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} z_0 + 1 - e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} + 1$ **car** $z_0=2$

Par suite $Z_1 = \text{aff}\left(\overrightarrow{AM_1}\right) = z_1 - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b- Soit la proposition de récurrence $\mathscr{P}$définie sur les entier n par $Z_n=e^{i\frac{n\pi}{4}}$

■ $Z_0 = z_0 - 1 = 2 - 1 = 1 = e^{i0\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow$ la proposition P est vraie pour n = 0.

★ Soit k un entier naturel. **Supposons** que la proposition $\mathscr{P}$est vraie jusqu'a l'ordre k; **montrons qu'**elle est vraie vraie à l'ordre (k + 1).

En effet

$Z_{k+1}=\text{aff}\left(\overrightarrow{AM_{k+1}}\right) = z_{k+1} - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}} z_n - e^{i\frac{\pi}{4}}$ **car** $M_{k+1}=f(M_k)$

$= e^{i\frac{\pi}{4}} (z_k - 1) = \text{aff}\left(\overrightarrow{AM_k}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} Z_k$

$= e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{k\pi}{4}} = e^{i\frac{(k+1)\pi}{4}}$ **car** on a supposé que $\mathscr{P}$est vraie à l'ordre k

les deux étapes de travaille ■ et ★ donnent que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c- Remarquons d'abord que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}} \neq 0$

A, M_0 et M_n sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{AM_n}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{Z_n}{Z_0}$ est un réel non nul (car $Z_n \neq 0$)

$\Leftrightarrow \arg(Z_n) \equiv 0 \ [\pi]$

$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$ et $\frac{n\pi}{4} = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

PROBLEME

A-1/ · f est définie et dérivable sur IR

· $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = \frac{2e^{2x}(1+e^x) - e^x e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}(2+e^x)}{(1+e^x)^2} > 0$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)		↗	$+\infty$
	0		

· $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^x} = 0$

car $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = +\infty$

2/a- ♦ $\lim\limits_{-\infty} f = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation y = 0 est une asymptote